Forskudt eksponentiel vækst

- differentialligning løst med separation af variable metoden

Vi har tidligere i tillægget *Differentialligninger – nogle beviser og modeller* givet et bevis for løsningerne til den differentialligning, som hører til en *forskudt eksponentiel vækst*. I dette tillæg skal vi se på et andet bevis, hvor vi benytter metoden *separation af variable*. Først skal vi bevise et lemma.

Lemma 1

For $a \neq 0$ og $b - a \cdot y \neq 0$ gælder:

(1) $$\int \frac{1}{b - a \cdot y}\, dy \;=\; -\tfrac{1}{a} \cdot \ln\left|b - a \cdot y\right|$$

bevis: Vi foretager substitutionen $t = b - a \cdot y$. Heraf fås $dt = -a \cdot dy$ ved differentiation. Hermed er $dy = -\tfrac{1}{a} \cdot dt$. Integration ved substitution giver hedmed:

(2) $$\int \frac{1}{b - a \cdot y}\, dy \;=\; \int \frac{1}{t} \cdot \left(-\tfrac{1}{a} \cdot dt\right) \;=\; -\tfrac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{t}\, dt \;=\; -\tfrac{1}{a} \cdot \ln|t| \;=\; -\tfrac{1}{a} \cdot \ln\left|b - a \cdot y\right|$$

hvor vi i sidste lighedstegn er gået tilbage til den variable *y*.

□

Sætning 2

Givet en differentialligning på formen $y' = b - a \cdot y$, hvor $a \neq 0$ og b er konstanter. Den fuldstændige løsning til differentialligningen kan skrives på formen:

(3) $$f(x) \;=\; \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

hvor $c \in R$ er en arbitrær (vilkårlig) konstant.

Bevis: Differentialligningen $y' = b - a \cdot y$ kan også skrives

(4) $$\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$$

idet *x* er den variable. Nu er vi nødt til at dele op. Først ser vi på specieltilfældet, hvor højresiden er 0: $b - a \cdot y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \tfrac{b}{a}$. Ved at indsætte i differentialligningen ses det, at den konstante funktion

(5) $$f(x) = \tfrac{b}{a}$$

er en løsning til differentialligningen. Herefter kan vi antage, at $b - a \cdot y \neq 0$. Vi ser, at vi kan adskille de variable på højresiden i (4). Faktisk figurerer *x* slet ikke der. Dermed giver (4) anledning til

(6) $$\int \frac{1}{b-a\cdot y}\,dy \;=\; \int 1\,dx \;+\; c_1$$

hvor $c_1 \in R$ er en arbitrær konstant. Ifølge Lemma 1 giver det:

(7) $$-\tfrac{1}{a}\cdot \ln\left|b-a\cdot y\right| \;=\; x+c_1$$

Vi ganger på begge sider af lighedstegnet med $-a$, hvilket giver

(8) $$\ln\left|b-a\cdot y\right| \;=\; -a\cdot(x+c_1) \;=\; -a\cdot x-a\cdot c_1$$

For at slippe af med den naturlige logaritme på venstre side, tager vi den naturlige eksponentialfunktion på begge sider af lighedstegnet:

(9) $$\left|b-a\cdot y\right| \;=\; e^{-a\cdot x-a\cdot c_1} \;=\; e^{-a\cdot x}\cdot e^{-a\cdot c_1} \;=\; e^{-a\cdot x}\cdot c_2$$

hvor vi i andet lighedstegn har benyttet en potensregel. I sidste lighedstegn har vi tilladt os at kalde konstanten $e^{-a\cdot c_1}$ for c_2. Vi ser umiddelbart, at $c_2 \in R^+$, altså at c_2 er en positiv konstant. "Indmaden" under numerisktegnet må være lig med plus eller minus det, der står på højre side af lighedstegnet, altså:

(10) $$b-a\cdot y \;=\; \pm\, c_2\cdot e^{-a\cdot x} \;=\; c_3\cdot e^{-a\cdot x}$$

hvor vi har udskiftet $\pm c_2$ med c_3, hvor $c_3 \in R\setminus\{0\}$, altså hvor c_3 kan være et vilkårligt reelt tal på nær 0. Nu skal vi bare have isoleret y. Vi kan lægge $a\cdot y$ til på begge sider:

(11) $$b \;=\; c_3\cdot e^{-a\cdot x}+a\cdot y$$

og så trække $c_3\cdot e^{-a\cdot x}$ fra på begge sider:

(12) $$b-c_3\cdot e^{-a\cdot x} \;=\; a\cdot y$$

og dividere med a på begge sider:

(13) $$\tfrac{b}{a}-\tfrac{c_3}{a}\cdot e^{-a\cdot x} \;=\; y$$

Idet vi indfører en ny konstant $c_4 = -\frac{c_3}{a}$, har vi stadig $c_4 \in R\setminus\{0\}$. Hvis vi bytter rundt på siderne, fås:

(14) $$y \;=\; \tfrac{b}{a}+c_4\cdot e^{-a\cdot x}$$

Nu er vi tæt på. Faktisk skal vi blot indse, at vi godt kan lade c_4 være 0, for det svarer til den konstante løsning (5). Dermed har vi den fuldstændige løsning:

(15) $$y \;=\; \tfrac{b}{a}+c\cdot e^{-a\cdot x}$$

Det ønskede er dermed bevist.

$\square$

Eksempel 3

Betragt differentialligningen $y' = 2-0{,}5\cdot y$. Vi har altså $a=0{,}5$ og $b=2$. Dette giver $b/a = 2/0{,}5 = 4$, og den fuldstændige løsning $f(x) = 4+c\cdot e^{-0{,}5\cdot x}$, hvor $c \in R$. Har man en begyndelsesbetingelse, kan den arbitrære konstant c bestemmes. På næste side er tegnet hældningsfeltet for differentialligningen sammen med løsningskurver svarende til tre forskellige begyndelsesbetingelser. Den blå kurve er løsningskurve for differentialligningen med begyndelsesbetingelsen $f(0) = 12$, hvilket giver $c = 8$. Den røde kurve er løsningskurve for en løsning med begyndelsesbetingelse $f(0) = 1$, hvilket giver $c = -3$. Endelig er der den grønne kurve, som er løsningskurve for differentialligningen med begyndelsesbetingelse $f(0) = 4$, svarende til $c = 0$. Den konstante funktion $f(x) = 4$ er altså løsningen.